GHID DE RECAPITULARE PENTRU BACALAUREAT

ROLUL DERIVATELOR ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

1. Rolul derivatei de ordinul intâi în studiul funcțiilor
2. Rolul derivatei de ordinul doi în studiul funcțiilor
3. Aplicații

Prof. Negrea Viorica

1. *ROLUL DERIVATEI DE ORDINUL INTÂI ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR*

2. Determinarea intervalelor de monotonie

Teoremă. Fie funcția $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul *I*. Atunci:

a) funcția f este monoton crescătoare pe intervalul *I*, dacă și numai dacă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$;

b) funcția f este monoton descrescătoare pe intervalul *I*, dacă și numai dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.

Pentru stabilirea intervalelor de monotonie ale unei funcții $f : I \to \mathbb{R}$ se procedează astfel:

- se calculează derivata funcției f ($f'(x)$);
- se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$;
- se determină semnul funcției f' pe intervalele pe care aceasta nu se anulează;
- se stabilesc intervalele de monotonie în funcție de semnul derivatei.

Pentru a indica monotonia funcției f pe intervalul *I*, cu ajutorul semnului derivatei, se alcătuiește un tabel de monotonie a funcției, de forma:

x	- domniul de definiție al funcței - soluțiile ecuației $f'(x) = 0$
$f'(x)$	- semnul derivatei
$f(x)$	- monotonia funcției

3. Determinarea punctelor de extrem

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul *I*.

Punctele de extrem (maxim sau minim) ale funcției f se găsesc printre soluțiile ecuației $f'(x) = 0$.

Definiție. Fie $x_0 \in I$ și $f'(x_0) = 0$.

a) x_0 este punct de minim al funcției f dacă la stânga lui x_0, derivata f' este negativă, iar la dreapta lui x_0, derivata f' este pozitivă;

b) x_0 este punct de maxim al funcției f dacă la stânga lui x_0, derivata f' este pozitivă, iar la dreapta lui x_0, derivata f' este negativă.

Obs. Pentru stabilirea punctelor de extrem ale unei funcții se folosește acelasi tabel ca și pentru determinarea intervalelor de monotonie.

Teoremă. 1) Dacă x_0 este punct de minim al funcției f atunci $f(x) \geq f(x_0)$

2) Dacă x_0 este punct de maxim al funcției f atunci $f(x) \leq f(x_0)$

2. ROLUL DERIVATEI DE ORDINUL DOI ÎN STUDIUL FUNCȚIILOR

Cu ajutorul derivatei de ordinul 2 a funcții f se pot determina intervalele de convexitate si concavitate și punctele de inflexiune ale funcției.

4. <u>Determinarea intervalelor de convexitate si concavitate</u>

Teoremă. Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe intervalul *I*. Atunci:

c) funcția f este convexă pe intervalul *I*, dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$;

d) funcția f este concavă pe intervalul *I*, dacă și numai dacă $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.

Pentru stabilirea intervalelor de convexitate si concavitate ale funcției $f: I \to \mathbb{R}$ se procedează astfel:

- se calculează derivata de ordinul 2 a funcției f ($f''(x)$);
- se rezolvă ecuația $f''(x) = 0$;
- se determină semnul funcției f'' pe intervalele pe care aceasta nu se anulează;
- se stabilesc intervalele de convexitate și concavitate în funcție de semnul funcției $f''(x)$.

Pentru a indica convexitatea și concavitatea funcției f cu ajutorul semnului derivatei de ordinul 2, se alcătuiește un tabel de forma:

x	- domniul de definiție al funcței - soluțiile ecuației $f''(x) = 0$
$f''(x)$	- semnul functiei f''
$f(x)$	- convexitatea și concavitatea funcției

5. <u>Determinarea punctelor de inflexiune</u>

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe intervalul *I*.

Punctele de inflexiune ale funcției f se găsesc printre soluțiile ecuației $f''(x) = 0$.

Definiție. Punctul $x_0 \in I$ se numește punct de inflexiune al funcției f dacă într-o parte a lui x_0 funcția f este convexă, iar în cealaltă parte a lui x_0, funcția este concavă.

Obs. Pentru stabilirea punctelor de inflexiune ale unei funcții se folosește același tabel ca și pentru determinarea intervalelor convexitate și concavitate.

3. APLICAȚII

1. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases} x^2-x, x\ge 1\\ -x^2+x, x<1\end{cases}$.

    a) Să se studieze continuitatea funcţie f în punctul $x_0=1$.

    b) Să se calculeze $f'(0)+f'(2)$.

    c) Să se studieze derivabilitatea funcţie f în punctul $x_0=1$.

2. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$ definită prin $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

    a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

    b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0;+\infty)$.

    c) Să se calculeze $\lim_{x\to+\infty} x^3 f'(x)$.

3. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$ definită prin $f(x)=x-2\ln x$.

    a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$

    b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe intervalul $(0;+\infty)$.

    c) Să se demonstreze că $f(x)\ge \ln\frac{e^2}{4}$, $\forall x\in(0;+\infty)$.

4. Se consideră funcţia $f:R\setminus\{-1\}\to R$ definită prin $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

    a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}, \forall x\in R\setminus\{-1\}$.

    b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

    c) Să se demonstreze că $f(x)\ge 1$, pentru $\forall x>-1$.

5. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$ definită prin $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

    a) Să se calculeze $f'(e)$.

    b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului f.

    c) Să se demonstreze că $x^e\le e^x$ pentru $\forall x>0$.

6. Se consideră funcţia $f:R\to R$ de forma $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x<0\\ x^2+x+a, x\ge 0\end{cases}$ unde $a\in R$.

    a) Să se determine $a\in R$ astfel încât funcţia f să fie continuă în punctul $x_0=0$.

    b) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă – 1.

    c) Să se calculeze $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+1}{x^2+x}$.

7. Se consideră funcţia $f:R^*\to R$ definită prin $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

    a) Să se calculeze $f'(x), x\in R$.

    b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe $(0;2]$.

    c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}}\le 3e^{\sqrt{2}}$.

8. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$.

    a) Să se verifice că $f'(x)=4x$ pentru $\forall x\in R$.

    b) Să se calculeze $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

    c) Să se demonstreze că $f'(x)\le e^{4x}-1$, pentru $\forall x\in R$.

9. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$, $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Să se demonstreze că $0<f(x)\le\frac{1}{2e}$ pentru $\forall x\in[\sqrt{e};+\infty)$.

10. Se consideră funcţia $f:[0;1]\to R$, $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in[0;1]$.

b) Să se verifice că $f(0)+f'(0)=\frac{3}{4}$.

c) Să se demonstreze că $\frac{3}{e}\le\frac{1}{f(x)}\le 2, \forall x\in[0;1]$.

11. Se consideră funcţia $f:R\setminus\{1\}\to R$ defintă prin $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$

a) Să se calculeze $f'(x), x\in R\setminus\{1\}$.

b) Să se demonstreze că funcţia f admite două puncte de extrem.

c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

12. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$, $f(x)=x-e\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to e}\frac{f(x)}{f'(x)}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei *f*.

13. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$ definită prin $f(x)=\frac{x^4}{4}-\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in(0;+\infty)$.

b) Să se determine punctele de extrem ale funcţiei *f*.

c) Să se demonstreze că $\ln\sqrt{x}\le\frac{x^2-1}{4}$ pentru $\forall x\in(0;+\infty)$.

14. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=e^x-x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in R$.

b) Să se demonstreze că $f(x)\ge 1$ pentru $\forall x\in R$.

c) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

15. Se consideră funcţia $f:R\to R$, $f(x)=(x^2-2x+1)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x\in R$.

b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funţiei *f*.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)$.

Bibliografie

1. Burtea M., Burtea G. - *MATEMATICĂ- Manual pentru clasa a XI-a M2* , Editura Campion
2. Bacalaureat 2009- Matematică M2, Editura Campion